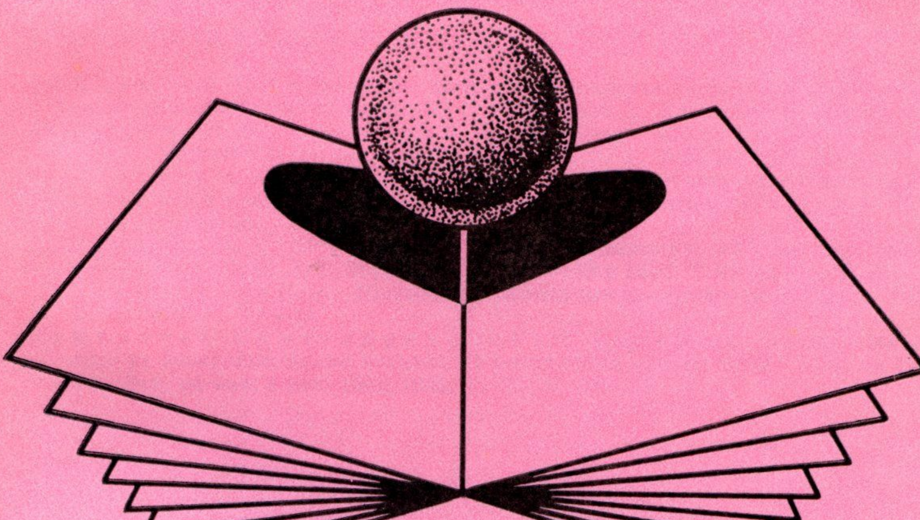
ISSN 0025-567X

Академия наук СССР

Математические заметки



том 45

выпуск 1 январь 1989

Математические заметки

т. 45, № 1 (1989)

ЛОКАЛЬНО ГАМИЛЬТОНОВЫ ГРАФЫ

Д. Катона, А. Косточка, Я. Пых, Б. Стечкин

Тематика локальных свойств графов предусматривает изучение общей структуры графа при ограничительных условиях на его «локальные части», например на все подграфы с фиксированным числом вершин. При этом структура всех таких графов обуславливается характеризацией лишь экстремальных представителей, т. е. графов, которые, обладая предписанными локальными свойствами, имеют предельно возможные размеры. Исходя из этого рассматривается следующая

З а д а ч а. Сколь мало ребер $m(n; C_k)$ может иметь n-вершинный граф, в котором среди любых k вершин найдется k-цикл C_k?

Решение этой задачи дает

ТЕОРЕМА. *Пусть* $n \geqslant k \geqslant 3$; *тогда*

$$m(n; C_k) = \left]\frac{n(n-k+2)}{2}\right[. \qquad (1)$$

О б о з н а ч е н и я. G_n — это n-вершинный граф, $G(S)$ — граф на множестве вершин $S = \{a_1, \ldots\}$, либо подграф, индуцированный этими вершинами. Граф называем *достаточной конструкцией*, если он удовлетворяет требованиям нашей задачи. $d_G(a)$ — степень вершины a в графе G, $|G|$ — число ребер графа G; F_n — это паросочетание на n вершинах, т. е. система из $[n/2]$ независимых ребер; F_n^* — это паросочетание с «вилкой», т. е. система из $]n/2[$ по возможности независимых ребер. P_n — это простой путь на n вершинах; K_n — полный граф на n вершинах. $[x]$ — целая часть числа x и $]x[= -[-x]$.

М е т р и к а. Достаточные конструкции будем рассматривать на множестве вершин $S_n = \{a_1, \ldots, a_n\}$. На S_n введем метрику d по правилу

$$d(a_i, a_j) = \min\{|i-j|, n-|i-j|\}.$$

Непосредственная проверка удостоверяет, что для такой метрики выполняется неравенство: если $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n$, то

$$d(a_{i_1}, a_{i_k}) \leqslant \min\left\{\sum_{j=1}^{k-1} d(a_{i_j}, a_{i_{j+1}}),\ n - \sum_{j=1}^{k-1} d(a_{i_j}, a_{i_{j+1}})\right\}. \qquad (2)$$

Доказательство. Докажем, что (1) выполняется как нижняя оценка. Если G_n — достаточная конструкция, то степень каждой ее вершины не меньше чем $(n-k+2)$. Действительно, если $\exists a \in S_n$: $d_{G_n}(a) \leqslant n-k+1$, то $\exists S_k \subset S_n$: $a \in S_k$, $d_{G(S_k)}(a) \leqslant 1$, а это значит, что $G(S_k) \not\supset G_k$. Теперь, так как $2|G_n| = \sum_{i=1}^{n} d_{G_n}(a_i)$ и $d_{G_n}(a_i) \geqslant n-k+2$ $(i=1, \ldots, n)$, то $2|G_n| = \sum_{i=1}^{n} d_{G_n}(a_i) \geqslant n(n-k+2)$ и, следовательно, $|G_n| \geqslant]n(n-k+2)/2[$, т. е. (1) как нижняя оценка доказано.

$k=3$. Здесь, очевидно, экстремальным является полный граф, поэтому всюду далее предполагаем, что $k \geqslant 4$.

$k=4$. Здесь, очевидно, экстремальным является граф $\bar{F}_n = K_n - F_n$, т. е. полный граф без паросочетания, поэтому всюду далее предполагаем, что $k \geqslant 5$.

Степень цикла C_n^t на n вершинах S_n определяется как граф $C_n^t = \{(a_i, a_j)\colon 1 \leqslant d(a_i, a_j) \leqslant t\}$, так что $C_n^1 = C_n$, $C_n^{[n/2]} = K_n$. В C_n^t каждая вершина имеет степень, равную $\min\{2t, n-1\}$, и $|C_n^t| = \min\left\{nt, \binom{n}{2}\right\}$.

Достаточность C_n^t при $t = \left[\frac{n-k+2}{2}\right]$. Пусть $S_k = \{a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}\} \subset S_n$, где $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n$. Если $d(a_{i_j}, a_{i_{j+1}}) \leqslant t$ $(j=1, \ldots, k-1)$, и $d(a_{i_1}, a_{i_k}) \leqslant t$, то $C_n^t(S_k) \supset C_k = \{(a_{i_1}, a_{i_2}), \ldots, (a_{i_{k-1}}, a_{i_k}), (a_{i_k}, a_{i_1})\}$. Рассмотрим альтернативный случай: пусть для определенности $d(a_{i_1}, a_{i_k}) \geqslant t+1$; но тогда если $1 \leqslant i_j < i_{j+l} \leqslant i_k$, то

$$d(a_{i_j}, a_{i_{j+l}}) \leqslant \left]\frac{n-k+2}{2}\right[+ l - 2. \tag{3}$$

Действительно, согласно (2) $d(a_{i_1}, a_{i_k}) \leqslant d(a_{i_1}, a_{i_2}) - \ldots - d(a_{i_{j-1}}, a_{i_j}) - d(a_{i_j}, a_{i_{j+l}}) - d(a_{i_{j+l}}, a_{i_{j+l+1}}) - \ldots - d(a_{i_{k-1}}, a_{i_k}) \leqslant n - (k-l-1) - d(a_{i_j}, a_{i_{j+l}})$, откуда

$$t+1 \leqslant n-k+l+1-d(a_{i_j}, a_{i_{j+l}}).$$

Так как правая часть (3) не превосходит t при $l=1$, то всегда $C_n^t(S_k) \supset P_k = \{(a_{i_1}, a_{i_2}), (a_{i_2}, a_{i_3}), \ldots, (a_{i_{k-1}}, a_{i_k})\}$.

Так как правая часть (3) не превосходит t при $l=2$ и $n-k \equiv 0 \pmod 2$, то $C_n^t(S_k) \supset C_k = \{(a_{i_1}, a_{i_3}), (a_{i_3}, a_{i_5}), \ldots, (a_{i_{k-3}}, a_{i_{k-1}}), (a_{i_{k-1}}, a_{i_k}), (a_{i_k}, a_{i_{k-2}}), \ldots (a_{i_4}, a_{i_2}), (a_{i_2}, a_{i_1})\}$, если $k \equiv 0 \pmod 2$, то равно $\{(a_{i_1}, a_{i_3}), (a_{i_3}, a_{i_5}) \ldots, (a_{i_{k-2}}, a_{i_k}), (a_{i_k}, a_{i_{k-1}}), (a_{i_{k-1}}, a_{i_{k-3}}), \ldots, (a_{i_4}, a_{i_2}), (a_{i_2}, a_{i_1})\}$, если $k \equiv 1 \pmod 2$.

Итак, если $n-k \equiv 0 \pmod 2$, то экстремальной является степень цикла C_n^t.

$n-k \equiv 1 \pmod 2$. Если $d(a_{i_1}, a_{i_k}) \geqslant t+2$, то $t+2 \leqslant n-k+l+1-d(a_{i_j}, a_{i_{j+l}})$, следовательно, $d(a_{i_j}, a_{i_{j+l}}) \leqslant$

$\leqslant \left]\frac{n-k+2}{2}\right[+ l - 3$ и при $l = 2$ эта величина не превосходит t; значит, и в этом случае $C_n^t(S_k) \supset C_k$. Таким образом, осталось рассмотреть случай $d(a_{i_1}, a_{i_k}) = t + 1$; здесь, если $d(a_{i_j}, a_{i_{j+2}}) \leqslant$ $\leqslant t$ $(j = 1, \ldots, k-2)$, то $C_n^t(S_k) \supset C_k$; значит, можно предпо-

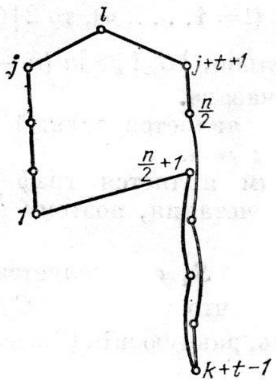


Рис. 1

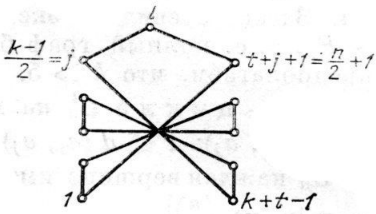


Рис. 2

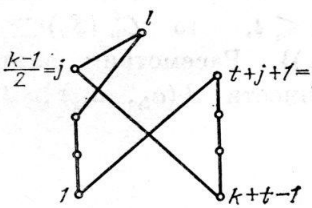


Рис. 3

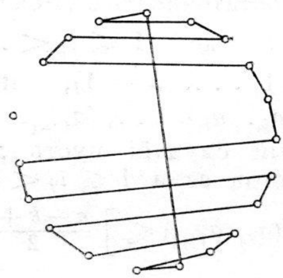


Рис. 4

лагать, что $d(a_{i_1}, a_{i_k}) = t + 1$, $d(a_{i_j}, a_{i_{j+2}}) = t + 1$; но тогда с необходимостью $d(a_{i_1}, a_{i_2}) = \ldots = d(a_{i_{j-1}}, a_{i_j}) = d(a_{i_{j+2}}, a_{i_{j+3}}) = \ldots = d(a_{i_{k-1}}, a_{i_k}) = 1$. Поэтому, для упрощения обозначений, предположим далее, что $S_k = \{a_1, \ldots, a_j, a_{j+t+1}, \ldots$ $\ldots, a_{k+t-1}\}$, где $j + 1 \leqslant l \leqslant j + T,$ $1 \leqslant j \leqslant \left[\frac{k-1}{2}\right]$, и рассмотрим теперь несколько случаев.

$n \equiv 0 \pmod 2$, $k \equiv 1 \pmod 2$. Пополним степень цикла C_n^t паросочетанием $F = \{(a_i, a_j) : d(a_i, a_j) = n/2\}$, обозначим полученный граф через G и проанализируем достаточность этого G.

$n \equiv 0 \pmod 2$, $k \equiv 1 \pmod 2$, $t > 1$, $j < \frac{k-1}{2}$. Ясно, что $(a_1, a_{n/2+1}) \in$ $\in G(S_k)$, а так как $j < (k-1)/2$, то $t + j + 1 < \frac{n}{2} + 1 < k + t - 1$. Значит, $G(S_k) \supset C_k$, где C_k состоит из пути $\{(a_{n/2+1}, a_1), (a_1, a_2), \ldots$

$\ldots, (a_j, a_l), (a_l, a_{t+j+1}), (a_{t+j+1}, a_{t+j+2}), \ldots, (a_{n/2-1}, a_{n/2})\}$ и пути на вершинах $\{a_{n/2}, a_{n/2+1}, \ldots, a_{k+t-1}\}$, который начинается в вершине $a_{n/2}$ и заканчивается в вершине $a_{n/2+1}$; существование такого пути следует из того, что $t > 1$ (рис. 1).

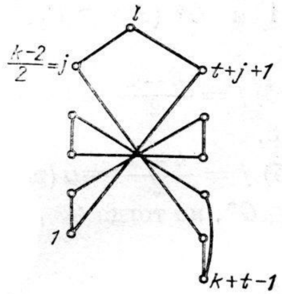


Рис. 5

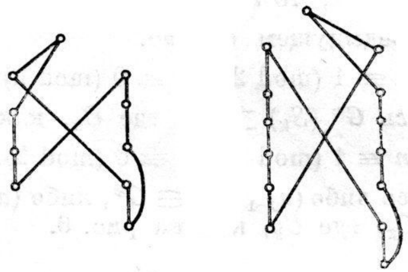


Рис. 6

$n \equiv 0 \pmod 2$, $k \equiv 1 \pmod 2$, $j = \frac{k-1}{2} \equiv 1 \pmod 2$. Здесь $\frac{n}{2} + 1 = t + j + 1$ и, значит, $G(S_k) \supset C_k$, где C_k, как на рис. 2.

$n \equiv 0 \pmod 2$, $k \equiv 1 \pmod 2$, $t > 1$, $j = \frac{k-1}{2} \equiv 0 \pmod 2$. Здесь либо $(a_{j-1}, a_l) \in G(S_k)$, либо $(a_l, a_{j+t-2}) \in G(S_k)$; пусть для определенности первое, но тогда $G(S_k) \supset C_k$, где C_k, как на рис. 3.

$n \equiv 0 \pmod 2$, $k \equiv 1 \pmod 2$, $t = 1$. Здесь $n = k + 1$ и экстремальным является граф $C_n = \{a_1, a_{n/2+1}), (a_2, a_n), (a_3, a_{n-1}), \ldots$ $\ldots, (a_{n/2}, a_{n/2+2})\}$. Действительно, если удаляется вершина a_1, то $C_{n-1} = \{(a_2, a_3), (a_3, a_4), \ldots, (a_{n-1}, a_n), (a_n, a_2)\}$; если же удаляется вершина $a_j \left(j \neq 1, \frac{n}{2} + 1\right)$, то C_{n-1} имеет вид, как на рис. 4.

$n \equiv 1 \pmod 2$, $k \equiv 0 \pmod 2$. Пополним степень цикла C_n^t паросочетанием с «вилкой» $F_n^* = \left\{(a_1, a_{(n+1)/2}), (a_i, a_j)\colon j - i = \frac{n+1}{2},\right.$ $\left. i = 1, \ldots, \frac{n-1}{2}\right\}$, обозначим полученный граф через G^* и проанализируем его достаточность. Заметим сперва, что G^* уже не обладает той симметричностью, как G, в выборе S_k, однако перебор различных выборов S_k в G^* удобнее заменить перебором двух различных паросочетаний с «вилками»: изначального и $-F_n^* =$ $= \left\{(a_{(n-1)/2}, a_n), (a_i, a_j)\colon j - i = \frac{n-1}{2}, \quad i = 1, \ldots, \frac{n-1}{2}\right\}$. Эквивалентность этих переборов очевидна, а их наличие объясняет большее количество вариантов, чем для G. Первый вариант обозначаем литерой (а), второй — (б).

$n \equiv 1 \pmod 2$, $k \equiv 0 \pmod 2$, $t > 1$, (а). Так как всегда $j \leqslant$ $\leqslant \left[\frac{k-1}{2}\right] = \frac{k-2}{2} < \frac{k}{2}$, то $t + j + 1 < \frac{n+3}{2} < k + t - 1$ и, значит, $G^*(S_k) \supset C_k$, так же как G в случае $n \equiv 0 \pmod 2$, $k \equiv 1 \pmod 2$, $t > 1$, $j < \frac{k-1}{2}$.

$n \equiv 1 \pmod 2$, $k \equiv 0 \pmod 2$, $t > 1$, (б) $j < \frac{k-2}{2}$. Так как $j < \frac{k-2}{2}$, то $t + j + 1 < \frac{n+1}{2} < k + t - 1$ и $G^*(S_k) \supset C_k$, как в предыдущем случае.

$n \equiv 1 \pmod 2$, $k \equiv 0 \pmod 2$, $t > 1$, (б) $j = \frac{k-2}{2} \equiv 1 \pmod 2$. Здесь $G^*(S_k) \supset C_k$, где C_k, как на рис. 5.

$n \equiv 1 \pmod 2$, $k \equiv 0 \pmod 2$, $t > 1$, (б) $j = \frac{k-2}{2} \equiv 0 \pmod 2$. Здесь либо $(a_{j-1}, a_l) \in G^*$, либо $(a_l, a_{t+j+2}) \in G^*$, но тогда $G^*(S_k) \supset C_k$, где C_k, как на рис. 6.

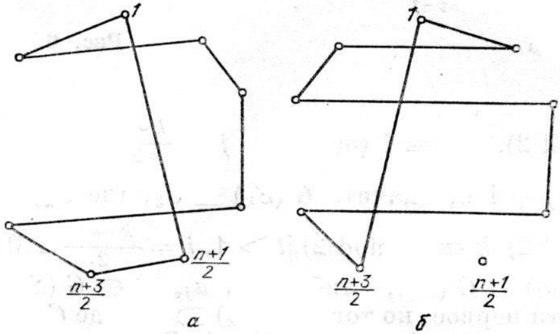


Рис. 7

$n \equiv 1 \pmod 2$, $k \equiv 0 \pmod 2$, $t = 1$. Здесь $n = k + 1$ и экстремальный граф имеет вид $C_n = \{(a_1, a_{(n+3)/2}), (a_1, a_{(n+1)/2}), (a_2, a_n), (a_3, a_{n-1}), \ldots, (a_{(n-1)/2}, a_{(n+5)/2})\}$. Действительно, если удаляется вершина a_1, то $C_k = \{(a_2, a_3), (a_3, a_4), \ldots, (a_{n-1}, a_n), (a_n, a_2)\}$; если удаляется вершина $a_i \left(i \neq 1, \frac{n+3}{2}, \frac{n+1}{2}\right)$, то C_k имеет вид, как на рис. 7*а*; если удаляется вершина $a_i \left(i = \frac{n+3}{2}, \frac{n+1}{2}\right)$, то C_k имеет вид, как на рис. 7*б*.

Теорема полностью доказана.

С л е д с т в и е 1. *Если $m(n; P_k)$ — наименьшее количество ребер в n-вершинном графе, у которого среди любых k вершин найдется путь P_k, то*

$$m(n; P_k) = \begin{cases} k-1, & n = k, \\ \left]\frac{n(n-k+1)}{2}\right[, & n > k. \end{cases}$$

С л е д с т в и е 2. *Если $m(n; F_k^*)$ — наименьшее количество ребер в n-вершинном графе, у которого среди любых k вершин найдется* *паросочетание* (*с «вилкой»*) F_k^*, *то*

$$m(n; F_k^*) = \left]\frac{n(n-k+1)}{2}\right[.$$

Действительно, если $G(n, k)$ — экстремальная конструкция для исходной задачи, то $|G(n, k+1)| = \left]\frac{n(n-k+1)}{2}\right[$ и граф $G(n, k+1)$ обладает тем свойством, что каждое множество k его вершин есть множество из k вершин некоторого цикла на $(k+1)$ вершинах. Значит, каждый k-вершинный собственный подграф графа $G(n, k+1)$ связен и содержит P_k и F_k^*. А так как P_k и F_k^* не имеют изолированных вершин, то тем самым следствия 1 и 2 доказаны.

Укажем теперь явный вид известных нам экстремальных конструкций, реализующих значение $m(n; C_k)$.

(1) $n - k \equiv 0 \pmod 2$ (см. рис. 8);

(2) $n - k \equiv 1 \pmod 2$, $n \equiv 0 \pmod 2$, $n \neq k+1$ (см. рис. 9);

(3) $n - k \equiv 1 \pmod 2$, $n \equiv 1 \pmod 2$, $n \neq k+1$ (см. рис. 10);

(4) $n = k+1$, $n \equiv 0 \pmod 2$ (см. рис. 11);

(5) $n = k+1$, $n \equiv 1 \pmod 2$ (см. рис. 12).

Конструкция (2) верна и при $n = k+1$, если $n \equiv 0 \pmod 4$; если же $n = k+1 \equiv 2 \pmod 4$, то см. рис. 13. Вообще, если $n = k+1 \equiv 0 \pmod 2$, то годится любая «сетка» в цикле, в которой либо число вертикалей, либо горизонталей — нечетно (см. рис. 14). Граф Петерсена является экстремальной конструкцией, реализующей $m(10, C_9)$. Вопрос описания всех экстремальных конструкций при $n = k+1$ представляет самостоятельный интерес. Неизвестно, существуют ли отличные от указанных экстремальные конструкции при $n > k+1$.

Определение. Граф G называется *локально гамильтоновым*, если для натурального k всякий его k-вершинный собственный подграф гамильтонов, т. е. имеет гамильтонов цикл.

Как обычно, под *гамильтоновым путем* понимается простой путь, проходящий через все вершины графа.

Утверждение. *Из каждой вершины локально гамильтонова графа выходит гамильтонов путь.*

Доказательство. Предположим противное — в локально гамильтоновом графе G_n рассмотрим вершину a_1, из которой не выходит гамильтонов путь. Пусть $P_l = \{(a_1, a_2), \ldots, (a_{l-1}, a_l)\}$ — длиннейший путь, исходящий из этой вершины a_1; ясно, что $k \leqslant l \leqslant n-1$. Положим $S_k = \{a_t, \ldots, a_l, \ldots, a_{t+k-1}\}$, где $n - k + 1 > t > l - k + 1$, $l \geqslant t \geqslant 2$, что, очевидно, всегда осуществимо. Так как G_n локально гамильтонов, то $G_n(S_k) \supset C_k$ и, значит, в $G_n(S_k)$ из каждой вершины, а значит, и из a_t, выходит гамильтонов путь; рассмотрим такой путь P_k, исходящий из вершины a_t. Тогда в G_n имеется путь $P_t = \{(a_1, a_2), \ldots, (a_{t-1}, a_t)\} \subseteq \subseteq P_l$ и путь P_k, начинающийся из a_t и не проходящий через вершины $\{a_1, \ldots, a_{t-1}\}$ по построению; значит, в G_n имеется путь $P_t \bigcup P_k$, исходящий из a_1 на $t + k - 1 > l$ вершинах, что противоречит максимальности выбранного P_l.

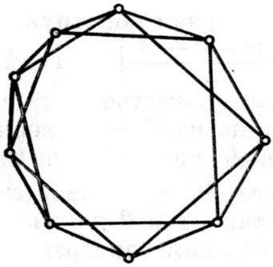


Рис. 8

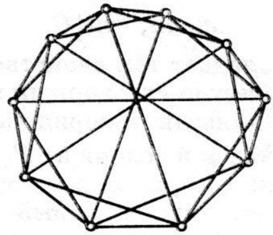


Рис. 9

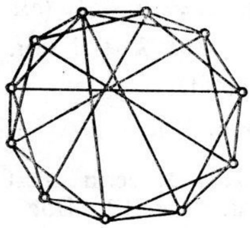


Рис. 10

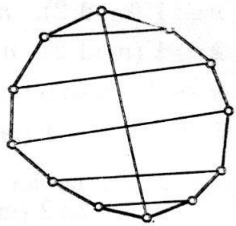


Рис. 11

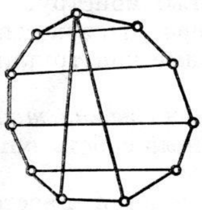


Рис. 12

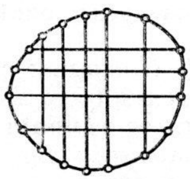


Рис. 13

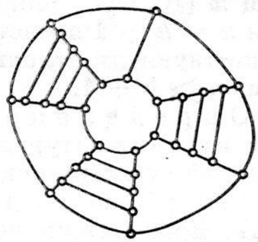


Рис. 14

Остается открытым вопрос о гамильтоновости локально гамильтоновых графов при нетривиальных значениях k: $\frac{n}{2} < k < n - 1$.

Авторы выражают свою признательность Т. З. Полипосяну, любезно ознакомившему их с аналогичными своими результатами.

Будапешт, МИАН ВНР,
Университет Э. Лоранда,
Математический институт
им. В. А. Стеклова АН СССР

Поступило
16.12.82
Переработанный вариант
19.03.87